**2019-2020 н.р.**

**Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**для учнів 6 класу**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Знайдіть найбільше натуральне число, у якого всі цифри різні та кожні дві сусідні цифри відрізняються щонайменше на 2. | 7б |
|  | Яблука зимових сортів становили 45% від усієї кількості зібраних фруктів у саду, а яблука сорту «Чемпіон» становили 40% від загальної кількості зібраних яблук. Скільки центнерів фруктів було зібрано, якщо яблук сорту «Чемпіон» зібрали 10,8 ц? | 7б |
|  | Собака в 9 разів важчий від котика, мишка у 20 разів легша від котика, а ріпка в 6 разів важча від мишки. У скільки разів собака важчий від ріпки? | 7б |
|  | У магічному квадраті суми елементів у кожному рядку, стовпці та діагоналі є однаковими. На малюнку зображено магічний квадрат, з якого викинули два числа, а три числа закрили картками А,В,С. Які числа викинули з квадрата? Знайдіть їх суму.   |  |  |  | | --- | --- | --- | | **16** | **3** | **А** | | **С** | **10** | **?** | | **В** | **?** | **4** | | 7б |
|  | У квадраті АВСD точка М є серединою відрізка АВ. Знайдіть площу квадрата АВСD, якщо площа затемненої частини дорівнює 7 см2? | 7б |

**Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**для учнів 7 класу**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Як розділити на дві рівні частини 12 відер хлібного квасу, налитого у 12-відерну бочку, користуючись 8-відерною та 5-відерною порожніми бочками? | 7б |
|  | Зустрілись два пастухи Іван та Петро. Іван говорить Петру: «Віддай мені 1 вівцю, тоді у мене буде вдвічі більше овець, ніж у тебе» А Петро йому відповідає: «Ні! Краще ти мені віддай 1 вівцю, тоді у нас буде порівну овець». Скільки овець було у кожного пастуха? | 7б |
|  | Знайдіть найменше складене число, яке не ділиться на жодне із натуральних чисел від 2 до 10. | 7б |
|  | У клітинидошки  можна ставити зірочки (не більше 1 зірочки у клітину) таким чином, щоб у кожному рядку, кожному стовпчику та кожній діагоналі було не більше ніж 4 зірочки. Яку максимальну кількість зірочок можна поставити на дошку за таких умов? | 7б |
|  | Прямокутники ABCD та KLMN зі сторонами AB=3см , BC=5 см , MN=4см та ML=6см розташовані, як це показано на рисунку. Відомо, що площа сірої частини прямокутника ABCD дорівнює 10 см2. Визначте, чому дорівнює площа чорної частини  прямокутника KLMN. | 7б |

**Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**для учнів 8 класу**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Числа х і у додатні, причому х+у =5. Яке найменше значення може приймати вираз 1/х+1/у? | 7б |
|  | Напис на надгробку видатного математика Діофанта в м. Ісковії був зроблений у формі задачі. Розв’яжи її, щоб дізнатися  скільки років прожив Діофант.  Прах Діофанта гробниця ховає, вдивися – і камінь  Мудрим мистецтвом розкриє покійного вік:  З волі богів шосту частину життя був він дитина,  А ще половину шостої – стрів із пушком на щоках.  Тільки минула сьома, з коханою він одружився.  З нею п’ять років проживши, сина діждався мудрець.  Та півжиття свого тішився батько лиш сином.  Рано могила дитину у батька забрала.  Років двічі по два батько оплакував сина.  А по роках цих і сам стрів він кінець свій печальний. | 7б |
|  | У трикутнику АВС бісектриса кута ВВ1 ділить його на два рівнобедрені трикутники, причому АВ= ВВ1 = СВ1 Знайдіть градусну міру кутів трикутника АСВ. | 7б |
|  | Сума трьох тризначних чисел aab, aba, baa дорівнює 1998. Знайдіть усі трійки таких чисел. | 7б |
|  | У ромбі ABCD проведено бісектрису ВМ кута АВD, яка утворює зі стороною ромба АD кут 120º. Знайдіть кути ромба. | 7б |

**Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**для учнів 9 класу**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Сума трьох тризначних чисел *aab, aba, baa* дорівнює 1998. Знайдіть усі трійки таких чисел. | 7б |
|  | Сто мір хліба розділіть між п’ятьма людьми так, щоб другий отримав настільки більше за першого, наскільки третій одержить більше за другого, четвертий – більше за третього, а п’ятий – більше за четвертого. Причому, двоє перших мають отримати в сім разів менше за трьох останніх. Скільки треба дати хліба кожному? | 7б |
|  | Не обчислюючи площі трикутників зі сторонами 5; 5; 6 і 5; 5; 8, встановіть чи можуть вони бути рівновеликими. | 7б |
|  | Два листоноші – А і В, яких розділяє відстань у 59 миль, виїжджають вранці назустріч один одному. Листоноша А проїжджає за 2 години 7 миль, а листоноша В – за 3 години 8 миль, при цьому B вирушає у дорогу годиною пізніше А. Скільки миль проїде листоноша В до зустрічі з листоношею А? | 7б |
|  | Деяке число збільшили на 25%. На скільки відсотків потрібно зменшити одержане число, щоб отримати початкове? | 7б |

**Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**для учнів 10 класу**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | Заповніть клітинки таблиці так, щоб числа в кожному рядку і в кожному стовпці утворювали геометричну прогресію:   |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 27 |  |  |  | |  |  | 36 |  | |  | 6 |  |  | |  |  |  | 8 | | 7б |
|  | Побудуйте графік функції: | 7б |
|  | Основи трапеції дорівнюють *a* і *b*. Чому дорівнює відрізок, що сполучає середини діагоналей цієї трапеції? | 7б |
|  | Визначте останню цифру числа 4343 – 1717 | 7б |
|  | Сторони *a, b, c* трикутника АВС лежать відповідно проти кутів А, В і С. Доведіть, що бісектриса кута А обчислюється за формулою: | 7б |

**Завдання І етапу Всеукраїнської учнівської олімпіади з математики**

**для учнів 11 класу**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Розв’яжіть рівняння: | 7б |
|  | Побудуйте графік функції: | 7б |
|  | Знайдіть значення виразу , де *х1 і х2*- корені рівняння 2*х2* – 11*х* + 13 = 0 | 7б |
|  | Квадрат вписано в круг. Всередині квадрата побудовано півкруги на його сторонах як на діаметрах. Чотири попарних перетини цих кругів утворюють фігуру «квітка». Доведіть, що площа цієї «квітки» дорівнює площі частини описаного круга, що лежить поза квадратом. | 7б |
|  | Обчислити , якщо . | 7б |

**ВІДПОВІДІ:**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **клас** | **№ завдання** | **Відповідь** |
| 6 |  | **Відповідь. 9758642031**  Зрозуміло, що число не може мати більше ніж 10 цифр, крім того, воно повинно бути десятицифровим, бо таке число завжди більше за число, яке має меншу кількість цифр. Таким чином, будемо ставити відповідні цифри по місцях. 975 – перші три цифри; другою цифрою не може бути 8, так само, як і третьою 864 – наступні три цифри. Далі не може стояти цифра 3, а має стояти 2  Тому останні цифри мають бути 3і 1. |
|  | **Відповідь: 60 ц.**  Яблука сорту «Чемпіон» становили 40% від загальної кількості зібраних яблук, отже 40% від 45%, що становить 18% усіх зібраних фруктів. Оскільки18% усіх фруктів становить 10,8 ц, то, фруктів  всього зібрали 60 ц. |
|  | **Відповідь:** у **30 разів**.  М:Р:К:С=1:6:20:180, тобто 180:6=30 |
|  | Сума чисел в діагоналі дорівнює 30. Отже А=30 – 16 – 3 = 11;  В = 30 – 10 – 11 = 9; С = 30 – 16 – 9 = 5. Тоді у другому рядку стоїть 30 – 10 – 5 = 15, у третьому - 30 – 9 – 4 = 17. Їх сума 32   |  |  |  | | --- | --- | --- | | **16** | **3** | **11** | | **5** | **10** | **?** | | **9** | **?** | **4** | |
|  | **Відповідь: 28 см2**  Площа прямокутника АМКD=14 см2, отже площа квадрата 28 см2 |
| 7 |  | |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | **бочки** | **переливання** | | | | | | | | | **12 в** | 12 | 4 | 4 | 9 | 9 | 1 | 1 | 6 | | **8 в** | - | 8 | 3 | 3 | - | 8 | 6 | 6 | | **5 в** | - | - | 5 | - | 3 | 3 | 5 | - | |
|  | **Відповідь: 5 і 7 овець.**  Нехай у Івана *х* овець, у Петра – *у*. Очевидно, що *х>у*. За умовою можна скласти вираз: *х*+1= 2(*у*–1), звідки *х*=2*у* –3, тому *у* >1   |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | П - у | 2 | 3 | 4 | 5 | | І - х | 1 | 3 | 5 | 7 | |  | Не задов. умову | Не задов. умову | Не задов. умову, якщо віддаватимуть овець | 7+1 =8  5-1 =4, або  7-1 =6 і 5+1=6 | |
|  | **Відповідь: 121.**  Розв’язання. Оскільки число складене, то його можна розкласти на два множники, більших від 1. Так як воно не ділиться на жодне натуральне число від 2 до 10, то обидва множники не менші 11, а саме число не менше 121. Залишилось зауважити, що 121 не ділиться ні на одне натуральне число від 2 до 10. |
|  | **Відповідь: 32 .**  Розв’язання. Зрозуміло, що більше 32 поставити не можна, бо у кожному з 8 рядків можна поставити не більш ніж 4 зірочки. Залишається навести приклад розстановки 32 зірочок, що задовольняє умови задачі.   |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  | \* | \* |  |  | \* | \* | |  |  | \* | \* |  |  | \* | \* | | \* | \* |  |  | \* | \* |  |  | | \* | \* |  |  | \* | \* |  |  | | \* | \* |  |  | \* | \* |  |  | | \* | \* |  |  | \* | \* |  |  | |  |  | \* | \* |  |  | \* | \* | |  |  | \* | \* |  |  | \* | \* | |
|  | **Відповідь: 19 см2**.  Розв’язання. Оскільки SABCD = 3∙5=15cм2, то SАРLQ = 15-10 = 5 см2  Тоді площа чорної частини прямокутника KLMN складає  4∙6 – 5=19см2 |
| 8 |  | **Відповідь:**   |  |  |  | | --- | --- | --- | |  |  |  | | *х* | 1 | >1 | | *у* | 4 | | *ху* | 4 | | *х* | 2 | <1 | | *у* | 3 | | *ху* | 6 |     Отже, найменше значення: |
|  | **Відповідь:**  х/6+х/12+х/7+5+х/2+4=х; х=8 |
|  | **Відповідь: 36º; 72º; 72º**  Нехай бісектриса поділила кут В на кути по *х*º, тоді з рівності кутів при основі рівнобедреного трикутника ‹С=  *х*º. ‹АВ1В=2*х*º як зовнішній кут ∆ВВ1С і ‹А=‹АВ1В=2*х*º  Отже, з ∆АВС маємо 2*х*+2*х*+*х*=180, *х=*36 |
|  | **Відповідь:**  100а+10а+в+100а+10в+а+100в+10а+а=1998  222а+111в=1998  2а+в=18  в=2(9 – а). Методом перебору визначаємо, що *а* може дорівнювати лише цифрам 5, 6, 7, 8. Тоді *в* дорівнює 8, 6, 4, 2 відповідно. Отже, отримуємо трійки: (882; 828; 288) (774; 747; 477) (666; 666; 666) (558; 585; 855) |
|  | Нехай ‹DВМ=*х*º, тоді ‹АВD=‹АDВ=2*х*º. З трикутника ВМD маємо: *х*+*2х*+120=180, *х*=20º. Отже, ‹АВD=‹АDВ=40º, ‹В=‹D=80º, ‹А=‹С=100º |
| 9 |  | **Відповідь:** (882; 828; 288) (774; 747; 477) (666; 666; 666) (558; 585; 855)  100а+10а+в+100а+10в+а+100в+10а+а=1988  в=2(9 – а) Очевидно, що а ≠ 0 і в ≠ 0, звідси а ≠ 9   |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | | а | *1* | *2* | *3* | *4* | **5** | **6** | **7** | **8** | | в | *16* | *14* | *12* | *10* | **8** | **6** | **4** | **2** | | можливість | *-* | *-* | *-* | *-* | **+** | **+** | **+** | **+** | |
|  | **Відповідь:**  х**=**; у= |
|  | **Відповідь:** Трикутники рівнобедрені, мають рівні бічні сторони по 5 см, тому їх площі будуть залежати від довжин основ і висот. Висота є медіаною, тому ділить основи на відрізки по 4 і 3 см відповідно. В обох випадках отримуємо прямокутні трикутники зі сторонами 5,4,3 (Єгипетський трикутник). Отже дані трикутники є рівновеликими. |
|  | **Відповідь:**  Для початку дізнаємося швидкості обох листоношів: швидкість А = 3,5 м/год., швидкість В = 8/3 м/год. Якщо відомо, що А проїхав на годину більше, віднімаємо цю відстань із загальної величини: 59-3,5 = 55,5. Потім ділимо отриману різницю на швидкість зближення: 55,5:37/6 = 9 год. Швидкість В помножити на час: 9\*8/3 = 24 м |
|  | **Відповідь:**  На 20% |
| 10 |  | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 7 | 54 | 108 | 216 | | 9 | 18 | 36 | 72 | | 3 | 6 | 12 | 24 | | 1 | 2 | 4 | 8 | |
|  | *х є (-∞; -2): у =-х-2-х+1-1*  *у=-2х-2*  *х є [-2; 1]: у=х+2-х+1-1*  *у=2*  *х є (1; +∞): у=х+2+х-1-1*  *у=2х* |
|  | **Відповідь:** |
|  | **Відповідь: 0**  431 закінчується 3 171 закінчується 7  432 закінчується 9 172 закінчується 9  433 закінчується 7 173 закінчується 3  434 закінчується 1 174 закінчується 1  Період 4 Період 4  4343 – 1717 = 434∙10+3 – 174∙4+1  = ...0  закінчується 7 закінчується 7 |
|  | S∆ABC = S∆ABD + S∆ACD => = . Оскільки SinA=, то з попередньої рівності маємо: Звідси |
| 11 |  | =1 або    *x1=*  *x2=* |
|  |  |
|  | За теоремою Вієта *,*Звідси маємо: |
|  | Нехай сторона квадрата *а*, тоді площа «квітки» буде складатися з 8 площ сегментів, радіус сегмента r = *а*/2 і централь ний кут 90º.  S квітки = *а*2(π/2 – 1)  Площа круга поза квадратом складається з 4 площ сегментів, радіус сегмента R= *а*/*√2* і центральний кут 90º. S круга. поза кв. = *а*2(π/2 – 1)  Отже, S квітки = S круга. поза кв. |
|  |  |

**Орієнтовні критерії оцінювання олімпіадної роботи**

|  |  |
| --- | --- |
| 7 | Повне правильне розв’язання завдання |
| 6 | Повне правильне розв’язання. Є недоліки, які в цілому не впливають на розв’язання |
| 5 | Розв’язання в цілому вірне. Однак воно містить ряд помилок, або не розглянуті окремі випадки. Але воно може стати правильним після невеликих виправлень або доповнень |
| 4 | Правильно розглянуто один з істотних випадків, вірно проведене дослідження або пояснення, частково розв’язане завдання |
| 3 | Доведені допоміжні твердження, вірно розпочато розв’язування |
| 2 | Розглянуто окремі важливі елементи розв’язання, або почато розв’язування завдання з подальшим невірним розв’язком |
| 1 | Розв’язуване завдання виконано з грубими помилками, які призвели до неправильного результату або присутня лише ідея розв’язку |
| 0 | Початок виконання завдання неправильний або до виконання завдання не приступав |